2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

El presente curso trata sobre álgebra lineal. Al buscarla palabra "lineal" en un diccionario se encuentra, entre otras definiciones la siguiente: lineal, perteneciente en lo relativo a línea, sin embargo, en matemáticas la palabra lineal tiene un significado más amplio. Esto implica que nuestro estudio está en relación con las propiedades de la recta, por lo cual veremos algunas propiedades de esta.

1. Pendiente, m, de una recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por: $m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$, si $x_1 \neq x_2$.

2. Sí $x_2 - x_1 = 0$ y $y_2 - y_1 \neq 0$, entonces la recta es vertical y se dice que la pendiente es indefinida.

3. Cualquier recta (a excepción de aquella que tiene una pendiente indefinida) se puede describir con su ecuación en la forma pendiente ordenada al origen $y = mx + b$, donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada al origen (el valor de *y* en donde cruza al eje vertical).

4. Dos rectas distintas son paralelas sí y sólo sí tienen la misma pendiente.

5. Si la ecuación de la recta se escribe en la forma $ax + by + c = 0$, $(b \neq 0)$, entonces se puede calcular fácilmente la pendiente m, como $m = -\frac{a}{b}$

6. Si m1 es la pendiente de la recta l_1 y m_2 es la pendiente de la recta l_2, $m_1 \neq 0$ y l_1 y l_2 son perpendiculares, entonces $m_2 = 1/m_1$.

7. Las rectas paralelas al eje x tiene pendiente cero.

8. Las rectas paralelas al eje y tienen pendiente indefinida.

2.1 Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Considere el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas x, y:

$$a_1x + b_1y + c = 0$$

$$a_2x + b_2y + d = 0$$

Donde a1, b1, a2, b2, son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales(x, y) que satisface el sistema anterior se le llama *solución*. Algunas propiedades que tienen los sistemas de ecuaciones lineales son las siguientes:

1. Si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$.

2. Si $a = b$ y c es cualquier número real, entonces $ca = cb$.

La propiedad 1 establece que si se suman dos ecuaciones se obtiene una tercera ecuación que es válida, la propiedad 2 establece que si se multiplican ambos lados de una ecuación por una constante se obtiene una segunda ecuación que también es válida.

Un sistema de ecuaciones lineales tiene o bien una solución o bien no tiene solución o bien un número infinito de soluciones, veamos algunos ejemplos de sistema con una solución, con un número infinito de soluciones y sin solución.

Ejemplo 1: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales o simultáneas:

$$3x – 2y - 4 = 0$$

$$5x + 2y - 12 = 0$$

Si se suman las dos ecuaciones se tiene, por la propiedad 1, la siguiente ecuación:

$$8x - 16 = 0, \text{ por tanto, } x = 2.$$

Entonces, si se despeja de la segunda ecuación,

$$2y = 12 – 5x = 12 - 10 = 2$$

Queda, por tanto que: $y = 1$.

De esta manera el par (2,1) satisface el sistema anterior y la manera en que se encontró la solución muestra que es el único par de números que lo hace, por lo que el sistema tiene una única solución.

Ejemplo 2: sistema con un número infinito de soluciones

$$x - y - 7 = 0$$

$$2x - 2y - 14 = 0$$

Como puede observarse las ecuaciones que forman el sistema son equivalentes, es decir, una es múltiple de la otra. Es decir, cualesquiera dos números, x *y* y que satisfacen la primera ecuación también satisfacen la segunda y viceversa. Esto se puede comprobar fácilmente si se multiplica la primera ecuación por 2, esto nos lo permite, de acuerdo con la propiedad 2, al ser la ecuaciones equivalentes, lo único que podemos hacer es despejar una incógnita en términos de cualquiera otra de las dos ecuaciones. Entonces $x - y = 7$ o $y = x - 7$, de modo que el par $(x, x - 7)$ es una solución del sistema anterior para cualquier número real x, en otras palabras, el sistema tiene un número infinito de soluciones, así algunas de las soluciones serán (7, 0), (0, -7), (8, 1), (1, -6), (3, -4) y (-2, -9).

Ejemplo 3: sistema sin solución

$$x - y - 7 = 0$$

$$2x - 2y - 13 = 0$$

Si se multiplica la primera ecuación por - 2, se obtiene la ecuación $-2x + 2y + 14 = 0$, que sumada con la segunda ecuación nos queda que $1 = 0$, lo cual es una contradicción, por lo cual el sistema no tiene solución.

2.2 Gráficas de sistemas de ecuaciones lineales

Para graficar un sistema de ecuaciones lineales o simultáneas se realizade la sigueinte manera.

Supóngase que se desa graficar el siguiente sistema usando el método de derterminantes:

$$3x + 6y - 18 = 0$$

$$-7x + 14y - 21 = 0$$

Usando el método de tabulación

$x = -1, 0, 1$

$y = 21/6, 3, 15/6$

$y = 1, 3/2, 2$

2.3 Propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales

a) Un sistema es inconsistente si no tiene solución

b) Dos sistemas son equivalentes si uno es un múltiplo del otro

c) El sistema

$$a_1x + b_1y + c = 0$$

$$a_2x + b_2y + d = 0$$

de dos ecuaciones con dos incógnitas x, y, no tiene solución, tiene una solución única o tiene un número infinito de soluciones, es decir, tiene solución y es única, sí y sólo sí $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$.

2.4 Métodos de solución de un sistema de ecuaciones lineales

Existen el álgebra diferentes métodos para encontrar la solución de un sistema e ecuaciones lineales, a continuación veremos el método de igualación.

Supóngase que se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales o simultáneas.

$$6x + 3y – 5 = 0$$

$$-4x – 5y + 9 = 0$$

Y se desea encontrar la solución del sistema por el método de igualación. Entonces se procede de la siguiente manera.

1. Se despeja la misma variable en ambas ecuaciones:

$$y = (- 6x + 5) / 3 \quad y = (4x – 9) / - 5$$

2. Se igualan ambas expresiones:

$$y = 17 / 9$$

$$(- 6x + 5) / 3 = (4x – 9) / - 5$$

3. Se resuelve la ecuación, dando que:

$$x = - 1 / 9$$

Esta es la solución para x.

4. Se sustituye este valor de x para encontrar y:

$$y = (- 6(-1/9) +5)) / 3$$

$y = 17 / 9$ esta es la solución para y, por tanto, el punto

$x = - 1 / 9$, $y = 17 / 9$, es la solución del sistema.